

Тип2: построение таблиц истинности

Таблицы истинности

- Таблица истинности — таблица, определяющая значение ложного высказывания при всех возможных значениях простых высказываний

Конъюнкция			Дизъюнкция			Инверсия		Импликация			Эквивалентность		
A	B	$A \wedge B$	A	B	$A \vee B$	A	$\neg A$	A	B	$A \rightarrow B$	A	B	$A \equiv B$
0	0	0	0	0	0			0	0	1	0	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	1			1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
Вывод: результат будет истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны			Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны, и истинным в остальных случаях			Вывод: результат будет ложным, если исходное выражение истинно, и наоборот		Вывод: результат будет ложным тогда и только тогда, когда из истинного основания (A) следует ложное следствие (B)			Вывод: результат будет истинным тогда и только тогда, когда оба высказывания одновременно либо ложны, либо истинны		

Логические операции

Логическая операция	Обозначение	В обычной речи
конъюнкция	\wedge	и
дизъюнкция	\vee	или
импликация	\rightarrow	если ..., то
эквиваленция	\sim	тогда и только тогда
отрицание	\neg	не

Приоритет логических операций

1. Инверсия
2. Конъюнкция
3. Дизъюнкция и
строгая дизъюнкция
4. Импликация и
эквиваленция



Законы алгебры логики

Исключение констант	$1 + A = 1$ $0 \cdot A = 0$ $0 + A = A$ $1 \cdot A = A$
Идемпотентность	$A + A = A$ $A \cdot A = A$
Закон исключения третьего	$A + \bar{A} = 1$
Закон непротиворечивости	$A \cdot \bar{A} = 0$
Закон отрицания	$\bar{\bar{A}} = A$
Закон коммутативности	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
Закон ассоциативности	$A + B + C = A + (B + C)$ $A \cdot B \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
Закон дистрибутивности	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$
Правило де Моргана	$\overline{(A + B)} = \bar{A} \cdot \bar{B}$ $\overline{(A \cdot B)} = \bar{A} + \bar{B}$
Закон поглощения	$A + A \cdot B = A$ $A \cdot (A + B) = A$
Закон склеивания	$A \cdot B + \bar{A} \cdot B = B$ $(A + B) \cdot (\bar{A} + B) = B$

Логическое следование можно выразить: $\bar{A} + B$

Эквивалентность можно выразить: $(\bar{A} + B) \cdot (A + \bar{B})$

Законы алгебры можно доказать составив таблицу истинности.

Преобразование логических выражений

Упрощение логического выражение - это преобразование с использованием законов алгебры логики, которое приводит к выражению с меньшим количеством операций логического сложения и умножения и без отрицания не элементарных формул.

Рассмотрим несколько примеров:

$$1. \overline{(x \cdot \bar{x})} \cdot (y + \bar{y}) = \\ = \bar{0} \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1$$

первый множитель - по закону непротиворечивости,
а второй множитель по закону исключения третьего

$$2. \overline{(x + y)} \cdot (x \cdot \bar{y}) = \\ = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot (x \cdot \bar{y}) = \\ = \bar{x} \cdot x \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} = \\ = 0 \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} = 0$$

правило де Моргана
ассоциативный закон
закон непротиворечивости

$$3. (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \\ = x \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{x} + x \cdot y + y \cdot \bar{y} = \\ = 0 + y \cdot (\bar{x} + x) + y = \\ = y \cdot 1 + y = y$$

Докажем закон склеивания преобразованием выражения
закон дистрибутивности
закон дистрибутивности для второго и третьего слагаемых
исключение констант

$$4. \overline{(x \cdot y + \bar{z})} = \\ = \overline{(x \cdot y)} \cdot \bar{\bar{z}} = \\ = (\bar{x} + \bar{y}) \cdot z$$

правило де Моргана
правило де Моргана и двойное отрицание

$$5. (x + y) \cdot (\bar{x} + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \\ = (x + y) \cdot (\bar{x} + y) \cdot (\bar{x} + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = \\ = y \cdot x$$

повторяем второй множитель
закон склеивания для двух пар множителей

Задача: Для какого из указанных X истинно высказывание $\neg((X > 2) \rightarrow (X > 3))$?

1) 1 2) 2 3) 3 4) 4

Решение:

Введем обозначения $(X > 2) - A, (X > 3) - B$, перепишем логическое выражение в удобной нам форме и упростим его, преобразовав импликацию и применив правило де Моргана:

$\overline{(A \rightarrow B)} = \overline{\bar{A} + B} = \bar{\bar{A}} \cdot \bar{B} = A \cdot \bar{B}$. Полученное выражение истинно, когда истинны оба множителя, то есть:

$$\begin{cases} A = 1 \\ \bar{B} = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} X > 2 \\ X \leq 3 \end{cases}, \text{ заметим, что утверждение } (X \leq 3) \text{ противоположно утверждению } (X > 3)$$

Системе неравенств удовлетворяет $X = 3$. Ответ: вариант 3.

Задача: Символом F обозначено одно из указанных ниже логических выражений от трех аргументов X, Y, Z . Дан фрагмент истинности выражения F :

X	Y	Z	F
1	0	0	1
0	0	0	1
1	1	1	0

Какое выражение соответствует F ?

- 1) $\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z$ 2) $X \wedge Y \wedge Z$ 3) $X \vee Y \vee Z$ 4) $\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z$

Решение: Для удобства перепишем выражения в удобной форме:

- 1) $\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z}$ 2) $X \cdot Y \cdot Z$ 3) $X + Y + Z$ 4) $\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z}$

Если подходить к решению формально, то надо вычислить значение каждого из выражений для каждого приведенного набора данных таблицы и сравнить их со значением F из таблицы.

Но можно сразу отвергнуть выражение 2, потому что конъюнкция переменных X, Y, Z при их значениях равным 1 должно быть истинно, а по таблице ложно. Выражение 3 также следует отвергнуть, так как дизъюнкция переменных X, Y, Z при их значениях равным 0 должно быть ложным, а по таблице истинно.

Значение первого выражения на первом же наборе данных таблицы не совпадает с табличным:

$$\overline{X} \cdot \overline{Y} \cdot \overline{Z} = \overline{1} \cdot \overline{0} \cdot \overline{0} = 0 \cdot 1 \cdot 1 = 0$$

Остается только выражение 4. Для подтверждения вычислим все значения выражения на наборах данных таблицы:

$$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = \overline{1} + \overline{0} + \overline{0} = 0 + 1 + 1 = 1$$

$$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = \overline{0} + \overline{0} + \overline{0} = 1 + 1 + 1 = 1$$

$$\overline{X} + \overline{Y} + \overline{Z} = \overline{1} + \overline{1} + \overline{1} = 0 + 0 + 0 = 0$$

Ответ: 4.

Задача: Каково наименьшее натуральное число X , при котором истинно высказывание:

$$(X^2 < 80) \rightarrow ((X + 1)^2 > 80) ?$$

Решение: Обозначим $(X^2 < 80)$ - А, $((X + 1)^2 > 80)$ - В, тогда получим условие задачи в виде:

$A \rightarrow B$, преобразовываем: $\overline{A} + B$. Полученное выражение истинно, когда истинно одно из слагаемых. Рассмотрим оба случая:

- $X^2 \geq 80$. В задаче речь идет о натуральных числах, поэтому отрицательные значения не рассматриваем:
 $X \geq 4\sqrt{5}$. Ближайшее натуральное число 9, поэтому $X \geq 9$
- $(X + 1)^2 > 80$, $X + 1 > 4\sqrt{5}$, $X > 4\sqrt{5} - 1$, $X \geq 8$.

Получается, что высказывание истинно при $X \geq 9$ или при $X \geq 8$. Наименьшее число 8.

Алгебра логики. Задача 4-3

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $(\neg A \wedge B) \vee (A \wedge B \wedge (A \vee \neg B))$

- 1) $A \wedge B$
- 2) $\neg A$
- 3) B
- 4) $A \vee \neg B$

Решение

Преобразуем

выражение: $(\neg A \cdot B) + (A \cdot B \cdot (A + \neg B))(A \cdot \neg B) + (A \cdot B \cdot (A + B)) = \neg A \cdot B + A \cdot B \cdot A + A \cdot B \cdot \neg B + A \cdot \neg B + A \cdot B \cdot A + A \cdot B \cdot B = \neg A \cdot B + A \cdot B + 0 + A \cdot \neg B + A \cdot B + 0 = \neg A \cdot B + A \cdot B + A \cdot \neg B + A \cdot B = BB$

Полученное выражение соответствует третьему варианту ответа.

Задача 4-7

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $(A \vee \neg B) \wedge (\neg A \wedge B \vee A \wedge B)$

- 1) $A \wedge B$
- 2) $\neg A \wedge B$
- 3) $A \vee \neg B$
- 4) $A \vee B$

Решение

Преобразуем выражение: $(A + \bar{B}) \cdot (\bar{A} \cdot B + A \cdot B) = (A + \bar{B}) \cdot B = A \cdot B + \bar{B} \cdot B = A \cdot B$

Полученное выражение соответствует первому варианту ответа.

Укажите, какое логическое выражение равносильно выражению $(A \vee B) \wedge ((A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B))$

- 1) $\neg A \wedge B$
- 2) $A \wedge \neg B \vee \neg A \wedge B$
- 3) $A \vee \neg B$
- 4) $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$

Решение

Преобразуем выражение: $(A + B) \cdot ((A \cdot \bar{B}) + (\bar{A} \cdot B)) = (A + B) \cdot A \cdot \bar{B} + (A + B) \cdot \bar{A} \cdot B = A \cdot \bar{B} + ((A + B) \cdot B) \cdot \bar{A} = A \cdot \bar{B} + B \cdot \bar{A} = A \cdot \bar{B} + \bar{A} \cdot B$

Полученное выражение соответствует второму варианту ответа.

2.1. Монотонные функции

Логическая функция F задаётся выражением:

$$(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F , содержащий все наборы аргументов, при которых функция F истинна.

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z .

Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
???	???	???	F
0	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1

В ответе напишите буквы x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая первому столбцу, затем – буква, соответствующая второму

столбцу, и т. д.) Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение.

Рассмотрим данное выражение. Оно равно единице в трех случаях: $(\neg x \wedge y \wedge z) = 1$, $(\neg x \wedge \neg y \wedge z) = 1$ или $(\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) = 1$. Каждое из этих равенств выполняется только при одном наборе переменных. Первое: $x = 0, y = 1, z = 1$. Второе: $x = 0, y = 0, z = 1$. Третье: $x = y = z = 0$. Так, из второго значения функции видим, что переменная 1 — z . А из третьего, что переменная 2 — x , тогда переменная 3 — y .

Ответ: zxy.

Логическая функция F задаётся выражением

$$(x \wedge y \wedge \neg z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции F, содержащий все наборы аргументов, при которых функция F истинна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных x, y, z.

Перем. 1	Перем. 2	Перем. 3	Функция
???	???	???	F
0	1	0	1
1	1	0	1
1	1	1	1

В ответе напишите буквы x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала — буква, соответствующая первому столбцу; затем — буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.) Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение.

Рассмотрим данное выражение. Оно равно единице в трех случаях: $(x \wedge y \wedge \neg z) = 1$, $(x \wedge y \wedge z) = 1$ или $(x \wedge \neg y \wedge \neg z) = 1$. Каждое из этих равенств выполняется только при одном наборе переменных. Первое: $x = 1, y = 1, z = 0$. Второе: $x = 1, y = 1, z = 1$. Третье: $x = 1, y = 0, z = 0$. Так, из второго значения функции видим, что переменная 3 — z . А из первого, что переменная 2 — x , тогда переменная 1 — y .

Ответ: yxz.

Логическая функция F задаётся выражением:

$$((y \equiv w) \vee (z \rightarrow w)) \wedge (y \equiv (x \vee z)).$$

Дан частично заполненный фрагмент, содержащий неповторяющиеся строки таблицы истинности функции F .

Переменная 1	Переменная 2	Переменная 3	Переменная 4	Функция
???	???	???	???	F
0	1	1	0	1
	1	0		1
0			1	1

Определите, какому столбцу таблицы истинности соответствует каждая из переменных w, x, y, z .

Функция представляет собой конъюнкцию двух выражений. Чтобы значение функции было равно 1, оба выражения, входящие в конъюнкцию, должны быть равны 1 (истинны).

Рассмотрим первую строку таблицы. В ней по две переменные имеют значения 0 и 1, значение функции равно 1. Если $y = 0$, то выражение $y \equiv (x \vee z)$ будет истинно, только если $x = 0$ и $z = 0$. Среди значений переменных получается как минимум три нуля, а в данной строке их всего два. Значит, предположение, что $y = 0$, неверно, и $y = 1$. Тогда, чтобы $y \equiv (x \vee z)$ было истинно, хотя бы одна из переменных x и z должна быть единицей. При этом они обе не могут быть единицами, так как единиц среди переменных в этой строке всего две. Получается, что $w = 0$. Тогда выражение $y \equiv w$ ложно, и чтобы левая часть конъюнкции была истинной, необходимо, чтобы выражение $z \rightarrow w$ было истинным. Значит, $z = 0$.

Итак, единицы в первой строке – это x и y , им соответствуют второй и третий столбцы таблицы, а нули – w и z , это первый и четвёртый столбцы.

Рассмотрим теперь вторую строку. В ней одна из переменных x и y равна нулю, другая – единице. Как уже говорилось, если $y = 0$, то обязательно $x = 0$, значит, во второй строке $y = 1, x = 0$. При этом w и z должны быть равны 1.

Мы выяснили, что во втором столбце таблицы находится y , в третьем – x .

Рассмотрим третью строку таблицы. В ней одна из переменных w и z равна нулю, другая – единице. Если $z = 1, w = 0$, то выражение $z \rightarrow w$ ложно. Тогда, чтобы левая часть конъюнкции была истинной, необходимо $y = 0$. Но тогда из правой части конъюнкции следует $z = 0$. Противоречие. Значит, $z = 0, w = 1$. Переменные x и y могут быть двумя нулями или двумя единицами.

Итак, в первом столбце таблицы находится z , в четвёртом – w .

Ответ: $zyxw$

2.1. Строки с пропущенными значениями

Логическая функция F задаётся выражением $(x \vee y) \rightarrow (z \equiv x)$.

Дан частично заполненный фрагмент, содержащий неповторяющиеся строки таблицы истинности функции F .

Определите, какому столбцу таблицы истинности соответствует каждая из переменных x, y, z .

Переменная 1	Переменная 2	Переменная 3	Функция
???	???	???	F
	0	0	0
	0		0

В ответе напишите буквы x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала – буква, соответствующая первому столбцу; затем – буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение.

Данная импликация принимает значение 0 тогда и только тогда, когда

Пусть $x = 0$, тогда $y = z = 1$. В первой строке нет двух единиц, значит, $x = 1$, и эта переменная находится в первом столбце. Тогда первая строка имеет вид 1 0 0.

Вторая строка должна отличаться от первой, поэтому она имеет вид 1 0 1. Рассмотрим два варианта:

x	y	z
1	0	0
1	0	1

x	z	y
1	0	0
1	0	1

Первый вариант не удовлетворяет системе (*), а второй удовлетворяет.

Ответ: xzy.

Логическая функция F задаётся выражением $(x \equiv y) \vee ((y \vee z) \rightarrow x)$.

Дан частично заполненный фрагмент, содержащий **неповторяющиеся** строки таблицы истинности функции F .

Определите, какому столбцу таблицы истинности соответствует каждая из переменных x, y, z .

Переменная 1	Переменная 2	Переменная 3	Функция
???	???	???	F
	1	1	0
		1	0

В ответе напишите буквы x, y, z в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы (сначала — буква, соответствующая первому столбцу; затем — буква, соответствующая второму столбцу, и т. д.). Буквы в ответе пишите подряд, никаких разделителей между буквами ставить не нужно.

Решение.

Данная импликация принимает значение 0 тогда и только тогда, когда

Пусть . Исходя из системы (*), , тогда . В первой строке нет нуля, значит, переменная x находится в первом столбце. Тогда первая строка имеет вид 0 1 1.

Вторая строка должна отличаться от первой, поэтому она имеет вид 0 0 1. Рассмотрим два варианта:

x	y	z
0	1	1
0	0	1

x	z	y
0	1	1
0	0	1

Первый вариант не удовлетворяет системе (*), а второй удовлетворяет.

Ответ: xzy.

НА PYTHON

Для логических операций приняты следующие обозначения:

операция	пояснение	в программировании
$\neg A, \bar{A}$	не A (отрицание, инверсия)	<code>not(A)</code>
$A \wedge B, A \cdot B$	A и B (логическое умножение, конъюнкция)	<code>A and B</code>
$A \vee B, A + B$	A или B (логическое сложение, дизъюнкция)	<code>A or B</code>
$A \rightarrow B$	импликация (следование)	<code>A <= B</code>
$A \leftrightarrow B, A \equiv B, A \sim B$	эквиваленция (эквивалентность, равносильность)	<code>A==B (python)</code> <code>A=B(pascal)</code>
$A \oplus B$	строгая дизъюнкция	<code>A != B (python)</code>

```
print('x y z w')for x in 0, 1:
    for y in 0, 1:
        for z in 0, 1:
            for w in 0, 1:
                F = (not(x) or y or z) and (x or not(z) or not(w))
                if not(F):
                    print(x, y, z, w)
```

- В результате будут выведены значения для $F=0$:

```
x y z w
0 0 1 1
```

0 1 1 1

1 0 0 0

1 0 0 1

range() можно представлять, как функцию, что возвращает последовательность чисел, регулирующую количество переданных в неё аргументов. Их может быть 1, 2 или 3:

- `range(finish);`
- `range(start, finish);`
- `range(start, finish, step).`

Здесь `start` – это первый элемент последовательности (включительно), `finish` – последний (не включительно), а `step` – разность между следующим и предыдущим членами последовательности.

```
print ('x y z y')
```

```
for x in 0,1:
```

```
    for y in range(0,2):
```

```
        for z in 0,1:
```

```
            F = (not x and y and z) or (not x and not z);
```

```
            if (F):
```

```
                print(x, y, z)
```